

Matemática financeira para o mercado imobiliário com HP 12C

Prof. Bellio

Informações Gerais sobre o Curso

Introdução ao estudo da Matemática Financeira

A importância da matemática financeira para o mercado imobiliário. Noções básicas da HP 12-C. Valor do dinheiro no tempo – juros e taxas de juros. Capitalização simples e sua aplicação. Juros simples. Montante simples. Desconto simples. Exercícios de fixação. Taxas de juro: nominal, efetiva. Capitalização e Descapitalização de taxas efetivas. Equivalência e proporcionalidade de taxas. Capitalização composta e sua aplicação. Juros compostos. Montante composto. Desconto composto. Exercícios de fixação. Séries de pagamentos iguais, postecipados e antecipados. Conceitos de valor presente, valor futuro, prestação, taxas de juros, período de capitalização. Noções básicas sobre financiamentos imobiliários. Principais planos de financiamento imobiliário utilizados no mercado: Tabela Price e Sistema de Amortização Constante – SAC. Financiamentos pela Tabela Price e SAC com Correção Monetária.

Dar ciência ao aluno sobre os fundamentos e as operações básicas que são pré-requisitos para o desenvolvimento do curso.

1. Explicar a própria razão de ser da Matemática Financeira.
2. Iniciar o aluno, pela prática, na utilização da calculadora HP-12C.
3. Conduzir o aluno a realizar operações similares as apresentadas no curso .
4. Compreender como a taxa de juros pode incidir sobre o capital no cálculo do montante capitalizada período a período.
5. Conduzir o aluno a associar as operações no dia-a-dia com os conhecimentos do curso.
6. Compreender as diferenças entre a capitalização simples e capitalização composta.
7. Mostrar que a taxa na capitalização composta varia exponencialmente e não linearmente, como na capitalização simples.
1. Realizar a transformação das taxas de forma equivalente quando da necessidade de se alterar o período da taxa.

2. Transformar taxas da forma equivalente;
3. Compreender a diferença entre renda financeira postecipada e renda financeira antecipada.
4. Conceituar e transformar taxas nominais e efetivas com base no período de capitalização;
5. Apresentar o conceito de spread/taxa real e como extraí-la de uma taxa de juros.
6. Apresentar séries de pagamentos com Carência e com Balões, reconhecendo suas características.
7. Efetuar cálculos das parcelas através da calculadora HP-12C.

Carga Horária

O curso terá a duração de XX horas/aula.

Apresentação da Apostila

Este módulo é composto por seis unidades de Estudo assim distribuídas:

Unidade 1 – Introdução à calculadora HP 12C

Nesta unidade veremos os fundamentos da calculadora HP 12C. A lógica Polonesa Reversa (RPN). As operações matemáticas e seus cálculos. As memórias para armazenar dados. O calendário e suas aplicações. A média aritmética simples e a média aritmética ponderada.

Unidade 2 – Capitalização Simples

Nesta unidade compreenderemos a incidência de juro simples sobre um capital. A utilização do juro simples em boletos de cobrança. A incidência do juro simples na operação de hot-money para pessoas jurídicas junto a rede bancária. como a taxa de juros incide sobre o capital no cálculo do montante capitalizada período a período. Compreender a utilização do desconto simples na antecipação de pagamentos.

Unidade3–Taxas de Juro

Nesta unidade o estudo das taxas de juro e suas aplicações nas operações do dia-a-dia. Conceituar e transformar taxas nominais e efetivas. Realizar a conversão de taxas efetivas em períodos menores para taxas efetivas em períodos maiores e vice-versa (capitalização e descapitalização de taxas efetivas). Compreender o que é Spread / ganho de taxas. Compreender e calcular taxas acumuladas e suas aplicações no cálculo da inflação no país. Compreender a calcular a taxa CDI – Certificado de Depósito bancário, utilizado diariamente no mercado financeiro/bancário e nas operações com empresas, inclusive com as do setor imobiliário.

Unidade 4 – Capitalização Composta

Nesta unidade compreender como a taxa de juros incide sobre o capital no cálculo do montante, capitalizada período a período. Estudar entre capitalização simples e composta, e que nesta última a taxa de capitalização varia exponencialmente e não linear como ocorre na capitalização simples. Compreender e calcular o Valor Futuro/Montante a juros compostos e o Valor Presente (Desconto Composto) em operações de desconto de títulos nas operações entre empresas e instituições do sistema financeiro. .

Unidade 5 – Rendas Financeiras - Financiamentos

Nesta unidade apresentaremos os vários tipos de séries de pagamentos uniformes reconhecendo suas características. Utilizando a calculadora HP-12C para os respectivos cálculos. Compreender e calcular séries postecipadas e antecipadas, com carência e com balões. Financiamentos com balões, muito usuais nos financiamentos do mercado imobiliário. Calcular o valor das prestações, a taxa de juro nos financiamentos imobiliários.

Unidade 6 – Planos de Amortização

Nesta unidade apresentar os sistemas de amortização – Tabela Price e SAC Sistema de Amortização Constante - de empréstimos reconhecendo suas características. Utilizar a programação da calculadora HP 12C para o desenvolvimento da Tabela Price. Compreender e calcular os financiamento pela Tabela Price e pelo sistema SAC, com Correção Monetária, usuais no mercado imobiliário.

Material Disponível

1. Apostila.

Atividades Previstas

1. Exercícios para fixação do conteúdo.
2. Avaliação parcial no AVA.

Sequência Didática

1. Leia com atenção os aspectos teóricos apresentados no texto desta Apostila, resolvendo os exemplos propostos. Dê uma atenção especial ao uso da calculadora HP-12C certificando-se de que não ocorram dúvidas em qualquer conteúdo. Caso isso venha a acontecer, entre em contato com o tutor da disciplina pelo Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).
2. Para complementar o seu aprendizado, utilize as referências de leitura complementar indicadas.
3. Embora o conteúdo desta unidade tenha sido preparado para ser absorvido em torno de uma hora-aula, foram anexados exercícios de fixação que demandarão um tempo maior de sua parte. Tais exercícios estão disponíveis no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), após realizar a leitura obrigatória desta Apostila, acesse o Ambiente para resolvê-los. Novamente, você poderá entrar em contato com o tutor para sanar eventuais dúvidas que tenham surgido na resolução desses exercícios.

SUMÁRIO

1. Introdução à calculadora HP 12C

2. Capitalização Simples

3. Taxas de Juro

4. Capitalização Composta

5. Rendas Financeiras/Financiamento

6. Planos de Amortização

Referências Bibliográficas



Introdução à calculadora HP 12 C



Este módulo pretende apresentar, de uma maneira sucinta e objetiva, as principais funções da calculadora HP 12C e sua utilização na resolução dos cálculos da Matemática Financeira, permitindo que você tenha um rápido aproveitamento da mesma.

Não pretende substituir o Manual, cuja leitura é altamente recomendada, e sim complementá-lo.

A calculadora HP 12C foi lançada em 1981 por HEWLETT PACKARD.

Ainda que a HP não divulgue números de vendas, não há dúvida de que a HP 12C é a calculadora mais vendida na história da empresa.

Os novatos costumam ficar confusos com a lógica RPN. Mas, quando a pessoa se habitua com ela, passa a fazer sequências longas de cálculos com agilidade. Por causa dessa aparente esquisitice, a HP 12C tem certo valor simbólico entre os profissionais. Uma calculadora dessa nas mãos equivale à carteirinha de um clube que, se não é restrito, pelo menos é respeitado.

Nos últimos anos, ficou fácil usar uma 12c sem precisar carregá-la no bolso. Há aplicativos que emulam a calculadora da HP em praticamente todas as plataformas móveis, e também em computadores.

1) TESTE DA CALCULADORA

Este teste indica se a calculadora está em perfeitas condições:

- 1) desligue a calculadora **ON**;
- 2) mantenha a tecla **ON** pressionada;
- 3) pressione a tecla **x**;
- 4) solte a tecla **ON** soltando em seguida a tecla **x**;
- 5) depois de algum tempo durante o qual o visor apresenta a palavra **RUNNING**, o mesmo vai apresentar:
- **8,8,8,8,8,8,8,8,8,8**, e uma série de anunciadores;
- 6) se isto aparecer, a calculadora está perfeita. Caso contrário ...

2) NOTAÇÃO BRASILEIRA / AMERICANA PARA OS NÚMEROS

A calculadora normalmente vem com a notação americana para os números, ou seja, **PONTO** para separar a parte decimal e **VÍRGULA** para separar grupos de 3 dígitos da parte inteira.

Para transformar para a notação brasileira, ou seja, **VÍRGULA** para separar a parte decimal e **PONTO** para dividir a parte inteira em grupos de 3 dígitos, proceda assim:

- 1) desligue a calculadora;
- 2) aperte a tecla Ponto (.) e a mantenha pressionada;
- 3) ligue a calculadora: **ON**;

4) solte a tecla Ponto (.)

Obs.: Para transformar de uma notação para outra, utilize os 4 procedimentos acima descritos.

Exemplo: digite na calculadora: 123456.78

Se no visor aparecer 123,456.78 Notação AMERICANA

Se no visor aparecer 123.456,78 Notação BRASILEIRA

3) AS TECLAS "f" e "g"

Para ativar a função em **AZUL**, deve-se apertar antes a tecla "g";

A função em **BRANCO** é ativada apenas apertando a tecla;

Para ativar a função em **AMARELO**, é necessário apertar antes a tecla "f".

4) AS TECLAS "f REG" e "CLX"

Para apagar os dados da memória da calculadora, utilizamos "f REG";

Para apagar apenas os dados do VISOR da calculadora, utilizamos "CLX";

5) CONTROLANDO O NÚMERO DE CASAS DECIMAIS NO VISOR

O número de casas decimais no visor pode ser controlado apertando a tecla "f" e o número de casas desejado.

Internamente a máquina trabalha com 10 casas decimais, independente do número de casas que aparece no visor.

Para arredondar o número para a quantidade de casas que aparece no visor, tecla "f RND".

6) OPERAÇÕES ELEMENTARES

Observe que a HP 12C não tem a tecla = (A Platinum tem também o igual).

Utiliza o sistema RPG (Reverse Polish Notation - Notação Polonesa Inversa).

Para somar 5 e 3 em uma máquina comum, teclamos: $5 + 3 = 8$.

Na HP-12C informamos os 2 valores a operar, consecutivamente, e em seguida a operação que se deseja. A calculadora efetua a operação e apresenta o resultado.

Para somar 5 e 3 na HP-12C, teclamos: 5 ENTER 3 + =====> O resultado apresentado é 8

7) AS TECLAS: "y^x", "1/x", "CHS"

Nos cálculos de Matemática Financeira é muito usado: POTENCIAÇÃO e RADICIAÇÃO.

Estas operações serão realizadas na HP-12C através das teclas y^x e $1/x$.

Para efetuar uma POTENCIAÇÃO, elevamos a base ao expoente indicado

Utilizamos a tecla y^x após a entrada da base e do expoente

Exemplo:

$1,6^5$ =====> 1.6 ENTER 5 y^x =====> Resultado 10,49

Para efetuar uma RADICIAÇÃO, utilizamos a propriedade matemática que diz que a RAIZ DE UM NÚMERO É IGUAL À SUA EXPONENCIAÇÃO COM O NUMERO INVERSO DO EXPOENTE.

Exemplos:

$$8,4^{1/4} = \text{Raiz Quarta de } 8,4 \qquad 16^{1/2} = \text{Raiz Quadrada de } 16$$

Para invertermos o expoente usamos a tecla $1/x$ que inverte o número do visor.

Exemplos:

$$8.4 \quad \text{ENTER} \quad 4 \quad 1/x \quad y^x \quad \text{=====}> \quad \text{Resultado } 1,70$$

$$16 \quad \text{ENTER} \quad 2 \quad 1/x \quad y^x \quad \text{=====}> \quad \text{Resultado } 4,00$$

Para elevar um número a um Expoente Negativo, utilizamos a tecla CHS que inverte o sinal do expoente

Exemplo:

$$2,8^{-3} \text{ =====> } 2.8 \text{ ENTER } 3 \text{ CHS } y^x \text{ =====> Resultado } 0,05$$

$$5,689^{-1/3} \text{ =====> } 5,689 \text{ ENTER } 3 \text{ CHS } 1/x \quad y^x \text{ =====> Resultado } 0,56$$

8) MEMÓRIAS PARA CÁLCULOS

A HP-12C possui 20 memórias operacionais numeradas de 0 a 9 e de .0 a .9 e 5 memórias financeiras n, i, PV, PMT, FV.

Números do visor são armazenados nas memórias através da tecla STO.

Para recuperar números das memórias e trazê-los ao visor, usamos a tecla RCL.

Exemplos: 1234 STO 0 CLX RCL 0 1234;

9876 STO 5 CLX RCL 5 9876;

1357 STO .5 CLX RCL .5 1357

Para apagar o número de uma determinada memória, temos que colocar ZERO nesta memória.

Por exemplo, continuando o exercício anterior:

0 STO 4 =====> RCL 4 0

Quando armazenamos um novo dado em uma memória, fica armazenado o último dado.

f REG além de apagar as memórias operacionais, apaga também todas as memórias financeiras e a pilha operacional.

f FIN apaga exclusivamente as memórias financeiras.

f Σ apaga especialmente as memórias de 1 a 6, usadas para cálculos estatísticos, e também a pilha operacional.

9) FUNÇÕES DE CALENDÁRIO

As funções de calendário fornecidas pela calculadora HP 12C podem trabalhar com datas entre 15/outubro/1582 até 25/novembro/4046.

9.1) FORMATO DA DATA

A calculadora HP 12C usa 2 formatos:

g M.DY → Mês/Dia/Ano (sistema americano) 08/18/1997 (dia 18 de agosto de 1997)

g D.MY → Dia/Mês/Ano (nosso sistema) 18/08/1997 (dia 18 de agosto de 1997)

Alimentação de data na calculadora HP 12C:

O dia e o mês com 2 algarismos e o ano com 4 algarismos.

Ex.: 18/08/1997

g D.MY 18.081997 ENTER (f 9)

9.2 - CÁLCULO DE UMA DATA FUTURA OU PASSADA

Obtemos uma nova data através da função **g DATE**:

- 1) tecle a data base seguida de **ENTER**
- 2) tecle o número de dias para a data futura (caso deseje uma data passada, tecle **CHS**)
- 3) tecle **g DATE**

No visor aparecerá a nova data, e o dia da semana, no canto direito.

A convenção para os dias da semana é a seguinte:

1 - 2a. f. 2 - 3a. f. 3 - 4a. f. 4 - 5a. f. 5 - 6a. f.
6 - sábado 7 - domingo

Para saber o dia da semana de uma data, basta somar zero a esta data, usando a função gDATE.

Exemplo 1 – Um cliente faz a compra de um imóvel a vai dar a entrada 93 dias após a assinatura do contrato. O contrato foi assinado no dia 24.04.84. Qual a data da entrada?

24.041984 ENTER 93 g DATE =====> Resposta 26.07.1984 4 (5a.f)

Exemplo 2 – Um cliente comprou um sobrado e no dia 12.11.84 ele pagou um balão que tinha negociado 180 dias, quando do fechamento do contrato. Qual foi a data da assinatura do contrato?

12.111984 ENTER 180 CHS g DATE =====> Resposta 16.05.1984 3 (4a.f)

Exemplo 3 - Qual o dia da semana em que D. Pedro decretou a Independência do Brasil (07.09.1822)

07.091822 ENTER 0 g DATE =====> Resposta 7.09.1822 6 (sábado)

9.3) CÁLCULO DO NÚMERO DE DIAS ENTRE DUAS DATAS

Obtemos a quantidade de dias entre duas datas através da função g Δ DYS:

- 1) tecele a data base seguida de ENTER;
- 2) tecele a segunda data o ;
- 3) tecele g Δ DYS

Exemplo: Uma empresa fez um financiamento na CEF para construção de um barracão no dia 13/06/80. No dia 30/08/84 houve a liberação da última parte para o término da obra. Pergunta-se: quantos dias houve entre as duas datas?

13.061980 ENTER 30.081984 g Δ DYS ==> Resp.: 1.539 dias

Esta resposta leva em consideração o número real de dias entre as duas datas (inclusive os anos bissextos).

Ao mesmo tempo a máquina calcula a diferença entre as duas datas, levando em consideração o ano comercial (12 meses de 30 dias) e coloca esta resposta na pilha operacional em Y.

Para obter esta resposta no visor, basta teclar $X >< Y$.

No exemplo acima, 1.517 , o número de dias pelo método comercial.

9.4) EXERCÍCIOS

Resolver, utilizando a máquina de calcular HP 12-C:

- | | | | |
|--|-----------------|--|---------------|
| 01) $1,02^8$ =====> | Resp.: 1,1717 | 02) $(1,02)^{-4}$ =====> | Resp.: 0,924 |
| 03) $2000 \times (1,005)^4$ =====> | Resp.: 2.040,30 | 04) $5 + 3 + 8 - 10^{5/4}$ =====> | Resp.: - 1,78 |
| 05) $2000 \times (1,07)^{-4}$ =====> | Resp.: 1.525,79 | 06) $(8 : 4) \times 2^{12}$ =====> | Resp.: 8.192 |
| 07) $\frac{1 - (1,09)^{-10}}{0,09}$ =====> | Resp.: 6,418 | 08) $(5+2)^2 \times (3+4)^{-2}$ =====> | Resp.: 1 |

09) Um contrato de locação foi realizado no dia 06/08/1997 e o cliente pagará uma determinada taxa 35 dias após. Qual foi a data de pagamento da taxa?

Resp.: 10/09/97 – 4ª f

10) Quantos dias há entre 18.08.97 e 01.01.2000 ?

Resp.: 866

11) Uma pessoa comprou um jogo de sala no dia 18/08/1997 e a entrada foi data 46 dias após. Qual foi a data da entrada?

Resp.: 03/10/97 – 6ª f

12) Qual o dia da semana em que foi proclamada a República no Brasil? (15.11.1889)

Resp.: 6ª f.

13) Uma negociação imobiliária ocorreu em 14/08/1997 e o vendedor receberá a comissão da venda 33 dias após. Qual foi a data do recebimento da comissão pelo vendedor?

Resp.: 16/09/97 – 3ª f.

10) PORCENTAGEM

PORCENTAGEM é a parte proporcional calculada sobre uma quantidade de 100 unidades.

A resolução envolve sempre uma Regra de Três Simples diretamente proporcional.

Exemplo

O salário de um funcionário em fevereiro/2005 era de R\$ 1.252,00. Em maio/2005 recebeu um reajuste de 3,38%. Qual o novo salário?

$$\begin{array}{ccc}
 100\% & & 1.252 \\
 3,38\% \downarrow & & x \downarrow \\
 & & x \rightarrow \text{R\$ } 42,32
 \end{array}$$

10.1) UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA HP 12C

10.1.1) CÁLCULO DA PORCENTAGEM - Usa-se a tecla % .

- 1º) Alimenta-se na calculadora o valor base sobre o qual queremos calcular a porcentagem (ENTER);
- 2º) Alimenta-se a taxa percentual e a tecla %;
- 3º) O resultado que aparecer no visor é a porcentagem calculada.

Exemplo 1

O salário de um funcionário de uma imobiliária, em março/2005 era de R\$ 1.252,00. Em abril/2005 ele recebeu um reajuste de 3,38%. Qual o novo salário?

1252 ENTER 3.38 % =====> Resp.: R\$ 42,32

Exemplo 2

Calcular 18 % de 1.250 caixas de frutas

1250 ENTER 18 % =====> Resp.: 225 caixas de frutas

O valor base fica armazenado na pilha operacional e o resultado da porcentagem, no visor.

Assim, se quisermos somar ou subtrair a porcentagem ao valor base, usamos + ou - .

Exemplo: Um aparelho de som tem como preço a prazo: R\$ 415,00. Na compra à vista a loja concede um desconto de 2,5 %. Qual o valor à vista?

Na HP-12C: 415 ENTER 2.5 % - =====> Resp.: R\$ 404,63

11) DIFERENÇA PERCENTUAL

DIFERENÇA PERCENTUAL é a diferença entre 2 valores, expressos na forma percentual.

A resolução envolve sempre uma Regra de Três Simples diretamente proporcional entre a diferença dos valores e o valor base de comparação.

Exemplo

Um imóvel de 56 m² tem valor de R\$ 168.000,00 no “Bairro A” de uma cidade e com a mesma metragem, no “Bairro B” da mesma cidade, o valor de R\$ 180.000. Qual é a diferença entre o valor do “Bairro B” contra o valor do “Bairro A”?

$$180.000 - 120.000 = 60.000 \text{ (diferença dos valores)}$$

$$\begin{array}{ccc} 120000 & 100\% & \\ 60000 \downarrow & x \downarrow & x \rightarrow 50\% \end{array}$$

11.1) UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA HP 12C

11.1.1) CÁLCULO DA DIFERENÇA PERCENTUAL - Utiliza-se a tecla Δ %

1º) Alimenta-se na calculadora o valor base sobre o qual queremos calcular a diferença percentual (ENTER);

2º) Alimenta-se o valor que queremos calcular a diferença percentual e a tecla Δ %;

3º) O resultado que aparecer no visor é a diferença percentual entre os 2 valores.

Exemplo 1

Um imóvel de 56 m² tem valor de R\$ 168.000,00 no “Bairro A” de uma cidade e com a mesma metragem, no “Bairro B” da mesma cidade, o valor de R\$ 180.000. Qual é a diferença entre o valor do “Bairro B” contra o valor do “Bairro A”?

$$120000 \quad \text{ENTER} \quad 180000 \quad \Delta \% \quad \text{=====>} \quad \text{Resp.: } 50 \%$$

Exemplo 2

Um eletrodoméstico está sendo vendido na loja A, por R\$ 540,00. O mesmo eletrodoméstico está sendo vendido na loja B por R\$ 567,00. Qual a diferença percentual entre os preços:

a) da loja A para a loja B

b) da loja B para a loja A

A) da loja A para a loja B (comparação contra o preço da loja B)

567 ENTER 540 Δ % =====> (-) 4,76 % mais barato que a loja B

B) da loja B para a loja A (comparação contra o preço da loja A)

540 ENTER 567 Δ % =====> 5 % mais caro que a loja A

12) PORCENTAGEM DO TOTAL

PORCENTAGEM DO TOTAL é a porcentagem de uma parte sobre um total.

A resolução envolve sempre uma Regra de Três Simples diretamente proporcional entre a cada valor parcial e o total considerado.

Exemplo: uma imobiliária vendeu durante um período imóveis no valor de R\$ 1.400.000,00. O vendedor José Antonio vendeu R\$ 250.000,00; a vendedora Ana Cláudia vendeu R\$ 400.000,00 e o vendedor Cláudio R\$ 750.000,00. Qual foi o percentual de cada vendedor(a)?

Queremos encontrar o percentual de cada parte: 25.000, 75.000 e 40.000 sobre o total

$$250.000 + 750.000 + 400.000 = 1.400.000$$

Para o 1º valor temos:	1400000	100%	
	250000 ↓	x ↓	x → 17,86%
Para o 2º valor temos:	1400000	100%	
	750000 ↓	x ↓	x → 53,57%
Para o 3º valor temos:	1400000	100%	
	400000 ↓	x ↓	x → 28,57%

12.1) UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA HP 12C

12.1.1) CÁLCULO DA PORCENTAGEM DO TOTAL - Utiliza-se a tecla % T

- 1º) Alimenta-se na calculadora o valor total sobre o qual queremos calcular os percentuais parciais (ENTER);
- 2º) Alimenta-se cada valor parcial e a tecla % T , seguida da tecla CLX que limpa apenas o VISOR;
- 3º) O resultado que aparecer no visor é o percentual de cada valor sobre o total.

Resolvendo o Exemplo acima com a HP 12C:

250000 ENTER 750000 + 400000 + =====> 140.000 ENTER

250000 % T → 17,86 % CLX

750000 % T → 53,57 % CLX

400000 % T → 28,57 %

12.2) EXERCÍCIOS

01) Um vendedor ganha comissões calculadas na base de 5% sobre os negócios que realiza. Havendo fechado um negócio de R\$ 800.000, qual será a sua parte?

Resp.: R\$ 40.000

02) Numa cidade a população adulta é de 18.300 pessoas, 42% das quais são analfabetas. Quantos são os adultos alfabetizados dessa cidade?

Resp.: 10.614 pessoas

03) Sobre uma compra de R\$ 10.500, foi feito um desconto de R\$ 840. Qual foi a porcentagem do desconto oferecido?

Resp.: 8%

04) Uma mercadoria que havia sido comprada por R\$ 7.000 foi vendida por R\$ 9.800. Qual foi a porcentagem do lucro obtido? (em relação ao preço de compra).

Resp.: 40%

13) MÉDIAS ARITMÉTICAS

13.1) MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES

É um processo matemático para obtermos o valor médio de um grupo de dados.

Exemplo 1:

Numa incorporadora, um vendedor fechou 5 negócios no mês; outro vendedor fechou 3 negócios e um 3º. Vendedor fechou 7 negócios. Qual foi a média de negócios fechado no mês, por vendedor?

$5 + 3 + 7 \implies 15 \div 3 \implies$ média de 5 negócios por vendedor

13.1.1) UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA HP 12C

A Calculadora HP 12C está programada da seguinte forma para este cálculo:

- Alimentamos os dados utilizando a tecla Σ^+
- Corrigimos dados já alimentados na máquina utilizando $g \Sigma^-$
- Calculamos a média aritmética simples utilizando " $g x$ "

Resolvendo o **Exemplo 1** acima com a HP 12C:

Teclas	Visor	Comentários
f REG	0,00	Limpa as memórias estatísticas
5 Σ^+	1,00	Alimenta o primeiro dado
3 Σ^+	2,00	Alimenta o segundo dado
7 Σ^+	3,00	Alimenta o terceiro dado

$g \bar{x}$ =====> 5,00

Exemplo 2

Calcular a média aritmética dos seguintes valores: 230, 710, 806 e 450.

Teclas	Visor	Comentários
f REG	0,00	Limpa as memórias estatísticas
230 Σ^+	1,00	Alimenta o primeiro dado
710 Σ^+	2,00	Alimenta o segundo dado
806 Σ^+	3,00	Alimenta o terceiro dado
450 Σ^+	4,00	Alimenta o quarto dado

$g \bar{x}$ =====> 549,00

13.2) MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

É um processo matemático para obtermos o valor médio de um grupo de dados, onde são considerados pesos específicos para cada dado (grau de importância na série).

Exemplo 1: notas escolares: Matemática 8, Português 10, História 0. E considerando os seguintes pesos: 6, 3 e 1, respectivamente. Qual a média aritmética do aluno?

$$\frac{(8 \times 6) + (10 \times 3) + (0 \times 1)}{6 + 3 + 1} = \frac{78}{10} \rightarrow 7,8$$

13.2.1) UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA HP 12C

A Calculadora HP 12C está programada da seguinte forma para este cálculo:

- Alimentamos os dados na calculadora através de ENTER e em seguida o respectivo peso utilizando a tecla $\Sigma+$
- Corrigimos dados já alimentados na calculadora, utilizando $g \Sigma-$ (elimina o valor e o seu respectivo peso)
- Calculamos a média aritmética ponderada, utilizando " $g \bar{x}_w$ "

Resolvendo o **Exemplo 1** acima com a HP 12C:

Teclas	Visor	Comentários
f REG	0,00	Limpa as memórias estatísticas
8 ENTER 6 $\Sigma+$	1,00	Alimenta o primeiro par de dados
10 ENTER 3 $\Sigma+$	2,00	Alimenta o segundo par de dados
0 ENTER 1 $\Sigma+$ _	3,00	Alimenta o terceiro par de dados
$g \bar{x}_w$	=====> 7,80	(Média ponderada do aluno)

Exemplo 02)

Numa mesma cidade, um terreno de 360 m² vale 350.000,00; outro de 500 m² vale R\$ 800.000,00 e outro de 750 m² vale 690.000,00.

Teclas	Visor	Comentários
f REG	0,00	Limpa as memórias estatísticas
0,01 ENTER 20000 Σ+	1,00	Alimenta o primeiro par de dados
0,03 ENTER 30000 Σ+	2,00	Alimenta o segundo par de dados
0,02 ENTER 18000 Σ+	3,00	Alimenta o terceiro par de dados

$\bar{g} \ xw \ f \ 4 \ \rightarrow \ R\$ \ 0,0215$ (Preço médio ponderado das ações)

13.2.1.1) OUTRA FORMA NA CALCULADORA HP 12C

Exemplo 03)

Calcular o PRAZO MÉDIO e o VALOR MÉDIO das 3 duplicatas abaixo que foram descontadas

R\$ 15.000,00 com vencimento para 18 dias

R\$ 70.000,00 com vencimento para 24 dias

R\$ 38.000,00 com vencimento para 35 dias

Alimentando-se a calculadora uma única vez, obtemos os 2 valores médios:

15000 ENTER 18 Σ+

70000 ENTER 24 Σ+

38000 ENTER 35 Σ+

VALOR MÉDIO → RCL 6 RCL 2 :

PRAZO MÉDIO → RCL 6 RCL 4 :

13.3) EXERCÍCIOS

01) Num bimestre, o aluno obteve na matéria "A", as seguintes avaliações: nota de prova 6, nota de trabalho 8, nota de conceito 8 e nota de aplicação 4. Qual a média bimestral?

Resp.: 6,5

02) Calcular o PRAZO MÉDIO e o VALOR MÉDIO das duplicatas abaixo:

R\$ 4.560,00 com vencimento para 5 dias R\$ 89.000,00 com vencimento para 36 dias
R\$ 2.220,00 com vencimento para 16 dias R\$ 75.000,00 com vencimento para 40 dias

Resp.: 36,67 dias e R\$ 64.560,00

03) Numa feira livre o arroz foi vendido pelos diversos feirantes pelos seguintes preços:

R\$ 2,00 o kg - 180 kg;

R\$ 2,10 o kg - 120 kg;

R\$ 2,50 o kg - 100 kg.

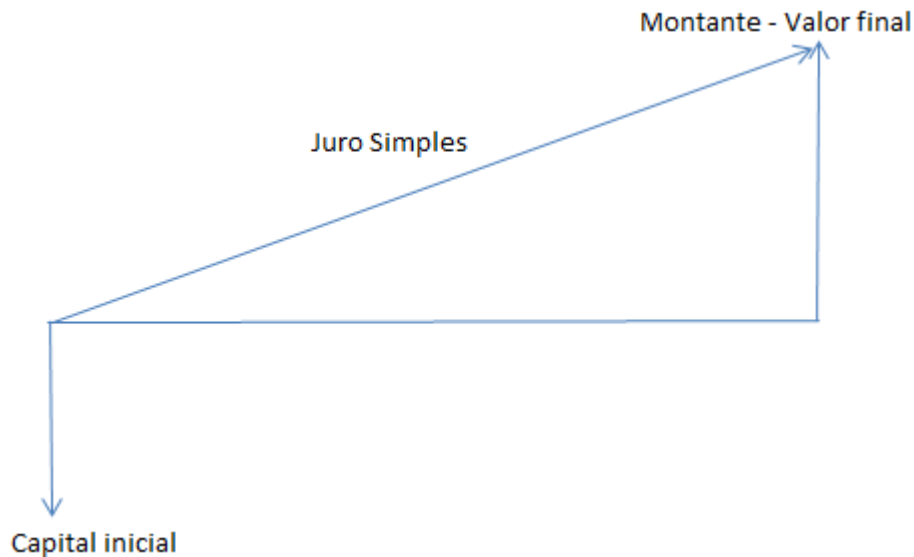
Qual foi o preço médio do quilo de arroz?

Resp.: R\$ 2,16

04) Misturando-se 12 litros de vinho de R\$ 3,20 com 24 litros de R\$ 2,30, qual será o preço do litro da mistura?

Resp.: R\$ 2,60

Capitalização Simples



JURO é a remuneração pelo capital empregado. É o pagamento pelo favor de um empréstimo

No país até 30 dias utiliza-se o Juro Simples. Na matemática Financeira, até 30 dias o Juro Simples é maior que o juro composto.

Em outras economias, o juro simples é utilizado até 1 ano.

Operações envolvendo boletos de cobrança, utilizam o juro Simples para o cálculo quando do atraso diário do pagamento.

Para Pessoas Jurídicas, a operação de Hot money também utiliza o juro simples quando a operação tem prazo até 30 dias.

Quando da antecipação de pagamento, tem-se um desconto que é o favor por se pagar antes do vencimento.

JURO SIMPLES

O *JURO* é *SIMPLES* quando é produzido unicamente pelo Capital Inicial.

$$J = C \times i \times n \qquad M = C + J \rightarrow M = C \times (1 + i \times n)$$

sendo:

J ==> Juros

C ==> Capital inicial aplicado

M ==> Montante

n ==> Prazo da aplicação do capital inicial

i ==> Taxa unitária de juros (taxa ÷ 100)

Observação: Em qualquer uma das duas fórmulas acima, caso necessário calcular outra variável, utiliza-se uma das duas fórmulas fazendo-se os cálculos através do processo de resolução de equação do 1o. grau com uma única variável.

Exemplo 01: Determinar os juros e o montante de um capital de R\$ 800,00 à taxa de 12% a.a., durante 7 meses, a juros simples.

$$J = C \times i \times n \rightarrow J = 800 \times 12/100/12 \times 7 \rightarrow J = 56$$

$$M = C + J \rightarrow M = 800 + 56 \rightarrow M = 856$$

RESOLUÇÃO na HP 12C

$$= 800 \text{ ENTER } 12 \% 12 \div 7 \times \rightarrow 56 \text{ (Juro)}$$

$$= (800 \text{ ENTER } 12 \% 12 \div 7 \times) 800 + \rightarrow 856 \text{ (Montante)}$$

Exemplo 02: Quais os juros diários a serem cobrados quando do pagamento após o vencimento de um boleto de cobrança, com valor de R\$ 340,35, cobrando-se a taxa mensal de juros de 5,8% ao mês pelo atraso?

RESOLUÇÃO na HP 12C

$$= 340,45 \text{ ENTER } 5,8 \% 30 \div 1 \times \quad \rightarrow \quad 0,66 \text{ (Juro)}$$

Exercício 01: Quais os juros pagos por um empréstimo de hot-money por 5 dias, de R\$ 45.000,00 à taxa mensal de 8,36% de juros?

Resp.: R\$ 627,00

Exercício 02: Qual a taxa mensal que remunerou o capital de R\$ 150.000,00 numa aplicação financeira a juro simples, cujo montante foi de R\$ 200.625,00, ao final de 150 dias?

Resp.: 6,75% a.m.

DESCONTO SIMPLES

DESCONTO é o abatimento pelo pagamento antecipado de uma dívida. Chama-se **DESCONTO SIMPLES COMERCIAL, BANCÁRIO OU POR FORA**, aquele que é calculado sobre o valor Nominal do título.

$$D = Vn \times id \times n \quad Vl = Vn - D \rightarrow Vl = Vn \times (1 - id \times n)$$

sendo:

D ==> Desconto Comercial

Vn ==> Valor Nominal do Título

id ==> taxa unitária de descontos

Vl ==> Valor Líquido (Atual, Presente)

n ==> Prazo da antecipação do pagamento

Exemplo 01: Uma duplicata de valor igual a R\$ 2.000,00 foi descontada num banco, 28 dias antes do vencimento, à taxa de 2,85% a.m. Qual o valor do desconto e qual o Valor Líquido da operação?

$$D = Vn \times id \times n \rightarrow D = 2000 \times 2,85/100/30 \times 28 \rightarrow D = 53,20$$

$$Vl = Vn - D \rightarrow Vl = 2000 - 53,20 \rightarrow Vl = 1.946,80$$

RESOLUÇÃO na HP 12C

$$= 2000 \text{ ENTER } 2,85 \% 30 \div 28 \times \rightarrow 53,20 \text{ (Desconto)}$$

$$= (800 \text{ ENTER } 12 \% 12 \div 7 \times) 800 + \rightarrow 1.946,80 \text{ (Líquido)}$$

Exemplo 02: Uma duplicata de valor igual a R\$ 12.568,00 foi descontada num banco, 36 dias antes do vencimento, à taxa de 2,34% a.m. Qual o valor do desconto?

RESOLUÇÃO na HP 12C

$$= 12568 \text{ ENTER } 2,34 \% 30 \div 36 \times \rightarrow 352,91 \text{ (Desconto)}$$

Exercício 01: Um cliente recebe por uma duplicata de R\$ 5.600,00, descontada comercialmente, 150 dias de seu vencimento, por R\$ 5.180,00. Qual foi a taxa percentual mensal da operação?

Resp.: 1,5% a.m.

Exercício 02: A quantos dias do vencimento foi descontada uma duplicata rural de valor R\$ 7.200,00, à taxa de 1,6% a.m., sabendo-se que sofreu um desconto de R\$ 288,00?

Resp.: 75 dias

Taxas de Juros



Juros é o rendimento que se obtém quando se empresta dinheiro por um determinado período. Os juros são para o credor (aquele que tem algo a receber) uma compensação pelo tempo que ficará sem utilizar o dinheiro emprestado.

Por outro lado, quem faz um empréstimo em dinheiro ou faz uma compra a crédito, geralmente terá que pagar um acréscimo pela utilização do dinheiro ou pelo parcelamento da totalidade do valor do bem. A esse acréscimo também dá-se o nome de juro.

Para determinar o valor dos juros são definidas taxas percentuais (taxas de juros) fixadas pelo credor.

As taxas de juros são calculadas de acordo com alguns fatores como, a inflação em vigor, com o que foi acordado no contrato ou com o risco do empréstimo para o credor.

Tipos de taxas de juro

Na *Capitalização Simples*, as taxas são PROPORCIONAIS ou NOMINAIS.

Na *Capitalização Composta*, as taxas podem ser: EFETIVAS ou EQUIVALENTES.

EXEMPLO: A caderneta de poupança paga juros de 6% a.a. com capitalização (crédito dos juros) mensal.

Observemos: taxa =====> 6% a.a.; capitalização =====> mensal

o período da taxa AO ANO e o período da capitalização MENSAL → **TAXA NOMINAL**

Transformação da Taxa Nominal (ao ano) → Taxa Efetiva (ao mês) (divide-se)

6% a.a. / 12 meses (em 1 ano) = 0,5% a.m. (efetiva com a capitalização mensal)

6% a.a./12 meses (em 1 ano) = 0,5% a.m. ► 0,5% a.m. com capitalização mensal

o período da taxa = ao período da capitalização: MENSAL → **TAXA EFETIVA ao mês**

Taxas Equivalentes

Transformação de uma Taxa Efetiva em um período → Taxa Efetiva em outro período

CAPITALIZAR → do período menor (n) para o período MAIOR (N)

DESCAPITALIZAR → do período MAIOR (N) para o período menor (n)

Utilizamos a fórmula matemática: $(1 + i_N) = (1 + i_n)^n$

i_N ► taxa do período maior

i_n ► taxa do período menor

n ► nº. de vezes do período < dentro do período >

Exemplo 01: A inflação no país, no mês de mai/2001 medida pelo IGP-M/FGV foi de 0,86%. Se durante um ano, esta fosse sempre a inflação mensal, qual seria a taxa acumulada anual?

$$(1 + i_N) = (1 + 0,0086)^{12} \rightarrow i_N = 1,0617 - 1 \rightarrow i_N = 0,0617 \times 100 \rightarrow \text{taxa} = 6,17\%$$

6,17% a.a. com capitalização anual → **TAXA EFETIVA AO ANO**

Exemplo 02: A taxa básica de juros da economia brasileira, definida pelo COPOM (Conselho da Política Monetária), em junho/2001 estava em 16,75% a.a. Qual a taxa equivalente ao mês?

$$(1 + 0,1675) = (1 + i_n)^{12} \rightarrow i_n = \sqrt[12]{1,1675} - 1 \rightarrow i_n = 0,0130 \times 100 \rightarrow \text{taxa} = 1,30\%$$

1,30% a.m. com capitalização mensal → **TAXA EFETIVA AO MÊS**

Exercício 01: Um Banco está cobrando a taxa mensal de 6,5% no cheque especial. Qual é a taxa Equivalente anual?

Resp.: 112,91% a.a.

Exercício 02: O IOF (Imposto sobre Operações Financeiras) é de 3,0% a.a. Qual a taxa equivalente ao dia?

Resp.: 0,0082% a.d.

Exercício 03: Uma empresa fez um capital de giro à taxa anual de 35,56%. Qual a taxa equivalente mensal?

Resp.: 2,57% a.m.

Exercício 04: A meta de inflação anual para o país, em 2001, era de 4,0%. Qual deveria ser a inflação média mensal para que esta meta fosse atingida? Resp.: 0,33% a.m.

Observação:

$N \rightarrow$ é o número de períodos menores dentro do período maior.

Caso for de mês para ano $\rightarrow 12$ (comercialmente tem 12 meses num ano)

Caso for de ano para mês $\rightarrow 12$ (comercialmente tem 12 meses num ano)

Caso for de dias para mês $\rightarrow 30$ (comercialmente tem 30 dias num mês)

Caso for de mês para dias $\rightarrow 30$ (comercialmente tem 30 dias num mês)

Caso for de ano para dias $\rightarrow 360$ (comercialmente tem 360 dias num ano)

Caso for de dias para ano $\rightarrow 360$ (comercialmente tem 360 dias num ano)

SPREAD/GANHO REAL/TAXA REAL

Spread pode ser definido como sendo o Ganho obtido em um repasse/aplicação de dinheiro/capital.

$$S_p = \left[\frac{(1 + I_{emp})}{(1 + I_{cap})} - 1 \right] \times 100$$

$S_p \rightarrow$ Spread

$I_{cap} \rightarrow$ Taxa Centesimal de Captação

$I_{emp} \rightarrow$ Taxa Centesimal de Empréstimo

Exemplo 01: Um banco cobra uma taxa efetiva de 8,37% a.m. no cheque especial. O banco capta os recursos com um custo de 3,18% a.m. Qual o spread na operação?

$$S_p = \left[\frac{(1 + 8,37/100)}{(1 + 3,18/100)} - 1 \right] \times 100 = \left[\frac{1,084}{1,032} - 1 \right] \times 100 = (1,050 - 1) \times 100 \implies 5,03 \% \text{ a. m.}$$

TAXA DE EMPRÉSTIMO E DE INFLAÇÃO > taxa sobre taxa

a) Taxa de Empréstimo pode ser definida como sendo a Taxa de Juros paga pelo dinheiro emprestado.

Emp → Taxa de Empréstimo

$$\text{Emp} = \{ [(1 + I_{\text{cap}}) \cdot (1 + I_{\text{sp}})] - 1 \} \times 100$$

I_{sp} → Taxa Centesimal do Spread
 I_{cap} → Taxa Centesimal da Captação

Exemplo 01: Um banco que tem um custo de captação de 2,45 % a.m. vai emprestar uma quantia para uma empresa num capital de giro. O banco deseja ganhar um spread de 2,5%. Qual a taxa de juros que a empresa pagará pelo capital de giro?

$$\text{Emp} = \{ [(1 + 3,45/100) \times (1 + 2,5/100)] - 1 \} \times 100 = \{ [(1,035) \times (1,025)] - 1 \} \times 100 = (1,06 - 1) \times 100$$

$$= 6,036 \% \text{ a.m. (taxa do capital de giro)}$$

b) Inflação pode ser definida como sendo a perda do poder aquisitivo.

O cálculo da inflação acumulada é feito através da fórmula:

$$\text{Infl} = \{ [(1 + \text{Infl}_1) \times (1 + \text{Infl}_2) \times (1 + \text{Infl}_3) \times \dots \times (1 + \text{Infl}_n)] - 1 \} \times 100$$

Infl_1 → Inflação no 1º. período considerado, na forma centesimal

Infl_2 → Inflação no 2º. período considerado, na forma centesimal

Infl_3 → Inflação no 3º. período considerado, na forma centesimal,

Infl_n → Inflação no último período considerado, na forma centesimal

Exemplo 01: No ano de 1997, no Brasil, a inflação mensal, medida pelo INPC/IBGE, apresentou os índices: Jan > 0,81; Fev > 0,45; Mar > 0,68 e Abr > 0,60. Qual a inflação acumulada no período de janeiro a abril de 1997?

$$\text{Infl} = \{ [(1 + 0,81/100) \times (1 + 0,45/100) \times (1 + 0,68/100) \times (1 + 0,60/100)] - 1 \} \times 100$$

$$= 2,56\% \text{ no período}$$

Exercício 01: Um banco que tem um custo na captação dos recursos de 1,89% a.m., vai emprestar a uma empresa, e deseja ter um spread de 3,5% sobre a captação. Qual a taxa juros que será cobrada da empresa pelo empréstimo? Resp.: 5,46% a.m.

Exercício 02: No ano X, de janeiro a abril, no país, a inflação mensal medida pelo GP-M/FGV, apresentou os seguintes índices: Jan = 1,58; Fev = 0,42; Mar = 1,16 e Abr = 0,59.

Qual foi a inflação acumulada no período?

Resp.: 3,7987% no período

Exercício 03: Uma aplicação financeira efetuada em uma instituição bancária, de janeiro a abril/1997 rentabilizou 4,56% no período. As taxas mensais de inflação do período, foram: 0,81, 0,45, 0,68 e 0,60, respectivamente. Qual foi o ganho real desta aplicação financeira contra a inflação do período?

Resp.: 1,95%

TAXA CDI

No Brasil, os bancos utilizam uma taxa de referência básica, criada em 1979 pelo Banco Central do Brasil, chamada Taxa Selic (Sistema Especial de Liquidação e Custódia). Essa taxa também é utilizada na delimitação das taxas de juros para o comércio.

O mercado financeiro trabalha para o cálculo do CDI o ano tendo 252 dias úteis.

26/out/17 – COPOM - SELIC = 7,50% a.a.

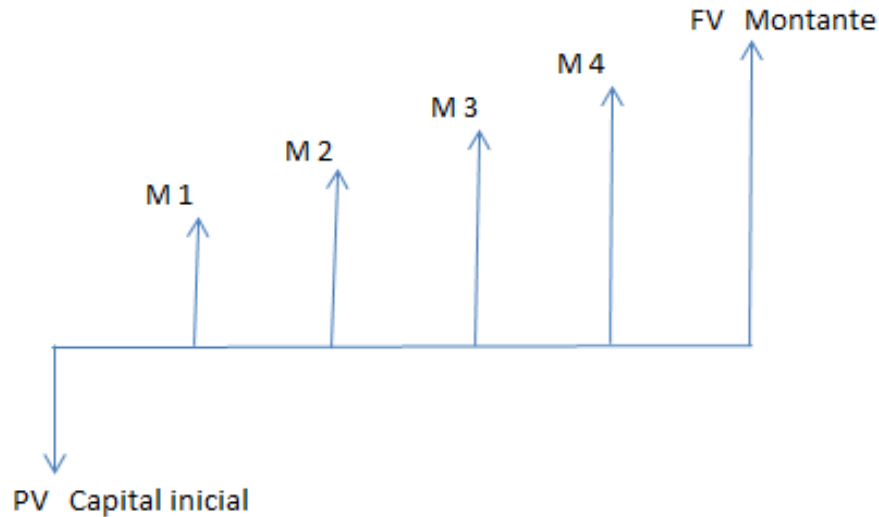
Cálculo diário no mercado financeiro para o 100% do CDI diário, para os próximos 30 dias

Taxa ano para dias úteis (base 252)

7,40% a.a. → descapitaliza para dia com base nos 252 du (dias úteis) ano
= 0,028374% a.d. (descapitalização)

Capitaliza pelos dias úteis nos próximos 30 dias (normalmente 22 dias)
= **0,63% a.m.** (esse é o custo do dinheiro para o banco – o 100% do CDI no dia

Capitalização Composta



JURO é a remuneração pelo capital empregado. É o pagamento pelo favor de um empréstimo

No país após 30 dias utiliza-se o Juro Composto. Na matemática Financeira, após 30 dias o Juro Composto é maior que o juro simples.

Em outras economias, o juro composto é utilizado após 1 ano.

Operações de empréstimos de dinheiro, de financiamentos de bens (imóveis, linha branca,...), utilizam o Juro Composto para o cálculo das prestações.

JURO COMPOSTO

JUROS COMPOSTOS, Acumulados ou Capitalizados, são os que no fim de cada período, são somados ao capital inicial, para produzirem novos juros no período seguinte.

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

sendo :

FV ==> Montante

PV ==> Capital inicial

i ==> Taxa efetiva

n ==> Prazo da operação; no mesmo período da taxa efetiva

TECLAS NA HP 12C:

n => período/prazo

i => taxa efetiva

PV => Capital inicial/Valor Presente

FV => Montante

Exemplo 1: Determinar o montante de R\$ 3.000,00 à taxa de 2% a.m., no fim de 2 anos.

PV = 3000 → i = 2% am = 0,02 (efetiva ao mês) → n = 2 anos = 24 meses
(igual ao período da taxa)

RESOLUÇÃO na HP 12C

3000 ENTER 2 i 24 n 0 PMT FV

→ R\$ 4.825,31

Exemplo 02: Calcular o resgate bruto de uma aplicação financeira de R\$ 10.000,00 à taxa de 10% a.a. em 3 anos. O IR (Imposto de Renda) sobre o rendimento cobrado é de 20%. Calcular também o valor do resgate líquido da aplicação financeira.

Exercício 01: Uma aplicação financeira foi realizada em CDB (Certificado de Depósito Bancário). O valor aplicado foi de R\$ 5.400,00 por 30 dias à taxa de 5,4% a.m. Qual o valor do resgate bruto e do resgate líquido após o IR de 20% sobre o rendimento?

Resp.: R\$ 5.691,60 e R\$ 5.633,28

Exercício 02: Calcular o valor de uma aplicação se a mesma teve como resgate bruto o valor de R\$ 12.300,00 após 4 meses de aplicação e à taxa de 3,2% a .m.?

Exercício 03: Qual o valor que deve-se aplicar em um CDB, à taxa de 24,50% a.a. para que após 8 (oito) anos de aplicação tenha-se R\$ 1.000.000,00?

Resp: R\$ 173.238,81

Exercício 04: Um cliente aplicou em CDB R\$ 40.000,00 durante 20 meses e obteve como resgate bruto o montante de R\$ 254.787,20 . Qual foi a taxa mensal de juros da aplicação financeira?

Exercício 05: Um cliente aplicou em CDB R\$ 16.785,00 durante 4 meses e obteve como resgate bruto o montante de R\$ 18.100,00. Qual foi a taxa mensal de juros da aplicação financeira?

Resp: 1,90% a.m.

CORREÇÃO MONETÁRIA de VALOR

Uma taxa de juro é Pré Fixada quando se conhece a mesma no início da operação e a mesma não muda durante todo o contrato. Quando se faz um empréstimo bancário com a taxa pré de 4,5% ao mês, a mesma não muda até o final do contrato.

Já uma taxa Pós Fixada é aquela que não se conhece previamente o valor a pagar, sendo necessário que se conheça o indicador da inflação que consta do contrato, para a sua apuração. Quando se faz um financiamento imobiliário, o índice de correção monetária é a TR. Tem a taxa de juro, por exemplo 7,85% ao ano, nominal e mais a TR.

Como os índices de inflação no país são divulgados entre os dias 08 e 10 do mês seguinte, utiliza-se sempre o índice do mês anterior.

Indicadores de inflação (correção monetária) mais usuais no país:

- **IPCA** – Índice de Preços ao Consumidor Amplo / IBGE – indicador oficial da inflação no país;
- **INPC** - Índice Nacional de Preço ao Consumidor / IBGE;
- **IGP-M** – Índice Geral de Preços do Mercado / FGV;
- **IGP-DI** – Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna / FGV -
- **CDI** – Certificado de Depósito Interbancário – utilizado entre bancos e em operações de empresas com bancos;
- **TR** – Taxa Referencial / BACEN - – utilizado como correção monetária dos contratos de financiamento imobiliário;
- **CUB** – Custo Unitário Básico da Construção / Sinduscon – específico para a construção civil;
- **INCC** – Índice Nacional de Custo da Construção – específico para a construção civil;
- **TLP** – Taxa de Longo Prazo / BACEN – utilizado pelo BNDES nos seus financiamentos.

Exercício 01: Uma dívida de R\$ 13.460,00 foi contratada em 01/05/2017 para ser paga em 01/09/2017 com correção monetária pelo IGP-M . Os percentuais do IGP-M, do período, foram:

abr/17 = - 0,12%; mai/17 = 0,97%; jun/17 = 0,62%; jul/17 = 0,04%;
ago/17 = 0,12%.

Qual o valor corrigido desta dívida em 01/09/17?

Exercício 02: Uma dívida de R\$ 50.000,00 tem que ser corrigida e no período as taxas de inflação foram: 0,35%; 0,29%; 0,44%; 0,24%; 0,56% e 0,33%. Qual o valor corrigido?

RENDAS FINANCEIRAS - FINANCIAMENTOS



Financiamento é uma operação financeira em que a parte financiadora, em geral uma instituição financeira, fornece recursos para outra parte que está sendo financiada, de modo que esta possa executar algum investimento específico previamente acordado. Ao contrário do empréstimo, os recursos do financiamento precisam necessariamente ser investidos do modo acordado em contrato.

A financiadora, então, pode cobrar ou não cobrar juros sobre o valor financiado de acordo com o valor e o tempo de pagamento. Empresas podem realizar financiamentos para angariar recursos para novos equipamentos ou realizar uma expansão enquanto pessoas físicas podem realizar financiamentos para comprar imóveis, automóveis, entre outros bens de grande valor.

As instituições financeiras possuem várias modalidades de financiamento para pessoas físicas e jurídicas, cada uma com uma característica que o torna mais adequado a casos específicos.

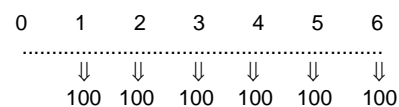
DEFINIÇÃO DE RENDAS

RENDAS, são um conjunto de dois ou mais pagamentos, realizáveis em épocas distintas, destinados a constituir um capital ou amortizar uma dívida.

TIPOS DE RENDAS: quanto ao Vencimento dos Termos, podem ser:

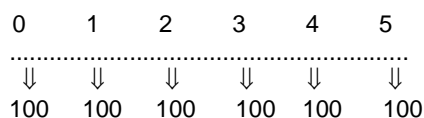
POSTECIPADAS: (ou Imediatas): quando os pagamentos ocorrem no fim de cada período (ex.: Empréstimos Bancários ou Vendas a Prazo sem entrada e com todas as prestações iguais)

Exemplo: Renda imediata de 6 termos mensais de R\$ 100,00



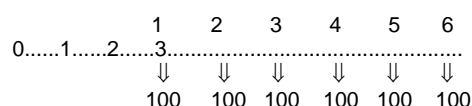
ANTECIPADAS: quando os pagamentos ocorrem no início de cada período (ex.: Caderneta de Poupança ou Vendas a Prazo com entrada e as demais prestações iguais)

Exemplo: Renda antecipada de 6 termos mensais de R\$ 100,00 (1+5)



DIFERIDAS: (ou com Carência) quando há um prazo de carência entre o valor atual e o início dos pagamentos. (ex.: Fime de 36 meses com carência de 12 meses e pagamentos semestrais iguais)

Exemplo: Renda de 6 termos mensais de R\$ 100,00 com 3 meses de carência.



BALÕES: (ou Parcelas Intermediárias/Reforço) quando durante o plano de pagamento ocorrem valores intermediários. Descapitalizam-se os mesmos para o valor presente, e então, utilizam-se as Rendas Postecipadas ou as Antecipadas. (ex.: Compra de Imóvel parcelando a entrada em 4 pagamentos anuais e o restante em 120 parcelas mensais)

Exemplo: Renda de 6 termos mensais de R\$ 100,00 com 1 balão de R\$ 250,00	0	1	2	3	4	5	6
.....							
no 2º. mês e outro balão de R\$ 135,00 no 5º. Mês.		↓	↓	↓	↓	↓	↓
		100	100	100	100	100	100
			↓			↓	
			250			135	

RENDAS POSTECIPADAS ou IMEDIATAS

Quando os pagamentos ocorrem no fim de cada período.

Fórmulas

$$\text{Valor Atual: } A_{\overline{n}|i} = \text{PMT} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n} \quad \text{Montante: } S_{\overline{n}|i} = \text{PMT} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Exemplo 01: Qual o valor das prestações mensais iguais, na compra de uma TV que à vista tem o preço de R\$ 545,00, sendo o financiamento em 6 meses, sem entrada e com a taxa de juros de 4,50% a.m.?

545							
↑							
0.....	1.....	2.....	3.....	4.....	5.....	6.....	
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	?	?	?	?	?	?	PMT

RESOLUÇÃO na HP 12C

545 CHS PV 4.50 i 6 n 0 FV PMT g END → R\$ 15,66

Exercício 04: Uma dívida de R\$ 602,82 está sendo renegociada com um Banco que apresentou a seguinte proposta: pagamento em 3 parcelas mensais de R\$ 203,93 ou 6 de R\$ 104,25 ou 12 de R\$ 55,32. Qual a taxa de juros mensais cobrada pelo Banco nesta renegociação para os planos apresenta.

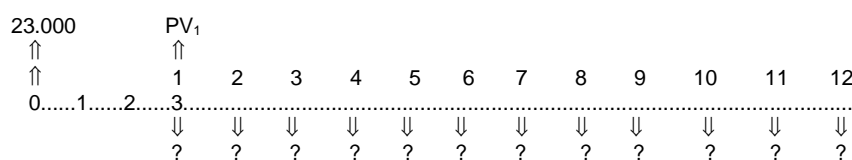
Resp: 0,74% a.m.; 1,07% a.m. e 1,51% a.m.

RENDAS COM CARÊNCIA ou DIFERIDAS

Quando há um prazo de carência entre o valor atual e o início dos pagamentos.

Atualiza-se inicialmente o valor e depois desenvolve-se o plano de financiamento.

Exemplo 01: Uma empresa fez um empréstimo bancário de R\$ 23.000,00 com as seguintes condições: carência de 3 meses e depois 12 pagamentos mensais. Sendo a taxa de juros do empréstimo igual a 3,10% a.m., qual é o valor das 12 prestações?



RESOLUÇÃO na HP 12C

23000 CHS PV 3.10 i 3 n 0 PMT FV → R\$ 25.205,99

CHS PV 12 n 0 FV g BEG PMT → R\$ 2.470,79

Exercício 01: Um empréstimo de R\$ 300.000,00 foi contratado com as seguintes condições:

- >> carência de 1 ano;
- >> na carência, pagamento de juros trimestrais;
- >> a partir do 13^a. mês, 24 pagamentos mensais;
- >> juros de toda a operação: TJLP = 9,75% a . a .;

→ cálculo do Valor Presente dos Reforços:

RESOLUÇÃO na HP 12C

3500 CHS FV 1.5 i 6 n 0 PMT PV → R\$ 3.200,90

6800 CHS FV 1.5 i 12 n 0 PMT PV → R\$ 5.687,43

→ total dos reforços = Entrada que não foi paga e financiada à parte:

RESOLUÇÃO na HP 12C

=3200,90 ENTER 5687,43 + → R\$ 8.888,33

→ valor do financiamento = valor do imóvel - reforços:

RESOLUÇÃO na HP 12C

=85000 ENTER 8888,33 - → R\$ 76.111,67

→ cálculo das 60 prestações mensais após a carência:

RESOLUÇÃO na HP 12C

76111.67 CHS PV 1.5 i 60 n 0 FV g END PMT → R\$ 1.932,74

Considerações: Na venda de uma mercadoria, temos duas partes:

- Entrada
- Financiamento

A ENTRADA quando não é paga no momento do negócio, é financiada para ser paga depois junto com uma das prestações; isto corresponde ao BALÃO ou REFORÇO ou PARCELA INTERMEDIÁRIA.

O FINANCIAMENTO corresponde às Prestações que serão pagas regularmente.

Exercício 01: Qual é o valor da prestação mensal relativa a um empréstimo de R\$ 400.000,00 à taxa de 4% a.m., com 3 parcelas intermediárias de R\$ 60.000,00, R\$ 80.000,00 e R\$ 70.000,00 cada uma?

As parcelas intermediárias vencem em 60, 90 e 180 dias, respectivamente, e o empréstimo será pago em 10 prestações iguais.
Resp.: Prestações = R\$ 26.887,89 cada uma.

Exercício 02: Uma empresa financiou a compra de um imóvel nas seguintes condições:

- >> 9 pagamentos mensais de R\$ 2.580,00 cada um
- >> 3 balões com vencimentos para 90, 150 e 180 dias após o negócio, respectivamente
 - de R\$ 4.500,00, R\$ 5.670,00 e R\$ 9.700,00
- >> taxa de juros = 3,46% a.m.
- >> qual era o valor à vista do imóvel?

Resp.: Valor à vista = R\$ 36.420,03

ÍNDICES/COEFICIENTES/FATORES

São valores utilizados na prática para serem multiplicados pelo valor da mercadoria que se quer comprar.

Exemplo 01: Ao pedirmos a um vendedor de uma loja de eletrodomésticos, qual o valor da prestação mensal na compra de um aparelho de som que tem seu preço à vista de R\$ 399,00 e que queremos financiar em 6 pagamentos sem entrada, observamos que o mesmo faz uso de uma tabela que normalmente está no verso da sua calculadora.

Obs.: Na realidade está utilizando um cálculo previamente executado por alguém e que facilita a venda do vendedor, sem haver necessidade de que ele saiba Matemática Financeira.

Temos que entender o que foi feito e o que são os valores que estão nesta tabela que o vendedor utiliza.

No exemplo acima: Queremos saber para um a mercadoria de R\$ 399,00, financiada em 6 parcelas mensais iguais, e com uma taxa de juros de 4,5% a.m., por exemplo, qual o valor do índice para entregar ao vendedor para que ele apenas multiplicando o valor da mercadoria por este índice efetue a venda com a taxa de 4,5% de juros mensais.

OBS.: normalmente os índices são utilizados com 6 a 8 casas decimais; nunca menos que 4 casas decimais.

→ cálculo do ÍNDICE/COEFICIENTE/FATOR

RESOLUÇÃO na HP 12C

1 CHS PV 4.50 i 6 n 0 FV PMT g END → 0,193878

→ R\$ (valor da prestação mensal para cada R\$ 1,00 de mercadoria comprada)

→ cálculo do Valor das Prestações no exemplo acima:

RESOLUÇÃO na HP 12C

0,193878 * 399 → R\$ 77,36

Exercício 01: Sendo a taxa de juros de 3,25% a.m. e o prazo em 12 pagamentos mensais iguais e sem entrada, qual o índice?

Exercício 02: Sendo o índice 0,09644127 para vendas em (1 + 11) vezes mensais iguais, encontrar a taxa de juros.

Exercício 03: Um Banco tem o índice 0,12489489 para financiamentos em 10 vezes mensais iguais e sem entrada. Qual é a taxa de juros cobrada pelo banco neste financiamento?

Resp.: 4,26% a.m.

Exercício 04: Uma loja tem o índice 0,136424 para vendas a prazo em (1+7) vezes mensais iguais. Qual é a taxa de juro cobrada pela loja nestas vendas?

Resp.: 2,58% a.m.

Exercício 05: Uma concessionária de veículos tem o índice 0,059823 para vendas em (1 + 23) vezes mensais iguais. Qual é a taxa de juros cobrada pela concessionária nas vendas?

Resp.: 3,44% a.m.

PLANOS DE AMORTIZAÇÕES - PAGAMENTOS

TABELA PRICE				
N. Parcelas	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo Devedor
0	----	----	----	R\$ 20.000,00
1	R\$ 200,00	R\$ 3.250,97	R\$ 3.450,97	R\$ 16.749,03
2	R\$ 167,49	R\$ 3.283,48	R\$ 3.450,97	R\$ 13.465,56
3	R\$ 134,66	R\$ 3.316,31	R\$ 3.450,97	R\$ 10.149,24
4	R\$ 101,49	R\$ 3.349,47	R\$ 3.450,97	R\$ 6.799,77
5	R\$ 68,00	R\$ 3.382,97	R\$ 3.450,97	R\$ 3.416,80
6	R\$ 34,17	R\$ 3.416,80	R\$ 3.450,97	R\$ 0,00
TOTAL	R\$ 705,80		R\$ 20.705,80	

Como vimos no módulo anterior, Financiamento é uma operação financeira em que a parte financiadora, em geral uma instituição financeira, fornece recursos para outra parte que está sendo financiada, de modo que esta possa executar algum investimento específico previamente acordado. Ao contrário do empréstimo, os recursos do financiamento precisam necessariamente ser investidos do modo acordado em contrato.

Os planos de amortização fazem o detalhamento dos financiamentos e os modelos mais usuais no país são a Tabela Price e o SAC – Sistema de Amortização Constante.

A Tabela Price tem como característica principal, que o valor das parcelas é constante quando for elaborada com uma taxa pré fixada.

Já o sistema SAC tem como característica principal, o valor constante das amortizações.

Também apresenta-se a Tabela Price e o SAC com a correção monetária, que no caso dos financiamentos imobiliários é pela TR.

DEFINIÇÃO DE AMORTIZAÇÃO

É o processo mediante o qual se extingue gradualmente uma dívida, por meio de uma série de pagamentos periódicos. Cada pagamento, inclui os juros vencidos e uma parte referente à amortização da dívida.

PLANOS DE AMORTIZAÇÕES

TABELA PRICE ou SISTEMA FRANCÊS ou SISTEMA DE PRESTAÇÕES IGUAIS

O plano de amortização de dívidas que é mais aplicada na prática é, inegavelmente o de prestações constantes.

O financiamento é pago em prestações iguais a cada período, cada uma sendo subdividida em duas partes:

- >> Os juros do período são calculados sobre o saldo no início do período;
- >> A amortização do principal é obtida pela diferença entre o valor da prestação e o valor de juros do período.

As prestações são iguais entre si e calculadas de tal modo que uma parte paga os juros e a outra o principal.

A dívida fica completamente paga na última prestação.

$$PV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n} \qquad PMT = PV \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Sendo: PMT = Prestação e PV = Valor Presente

OBS.: Sistema PRICE é um caso particular do Sistema Francês de Amortização. O cálculo das prestações é realizado usando-se a taxa proporcional ao período a que se refere a prestação, calculada a partir da taxa nominal.

Ex.: 12% a.a. com prestações mensais - toma-se 12% a.a. capitalização mensal = 1% a.m.

Exemplo 01: Um cliente emprestou R\$ 1.000,00 por 5 meses, à taxa de 5% a.m. pela Tabela Price.

Desenvolver a tabela do plano de Financiamento.

Período	Saldo Início Período	Juros do Período	Saldo Final Período	Total do Pagamento	Juros do Período	Amortização do Período
1	1.000,00	50,00	1.050,00	230,97	50,00	180,97
2	819,03	40,95	859,98	230,97	40,95	190,02
3	629,03	31,45	660,46	230,97	31,45	199,52
4	429,49	21,47	450,96	230,97	21,47	209,50
5	219,99	11,00	231,00	230,97	11,00	219,97

A Prestação (PMT) obtém-se como nas Rendas Postecipadas.

RESOLUÇÃO na HP 12C

1000 CHS PV 5 i 5 n 0 FV g END PMT

1 f AMORT

x><y

RCL PV

Exercício 01: Um apartamento de valor igual a R\$ 78.500,00 foi financiado pelo SFH em 15 anos e pela Tabela Price, com as prestações mensais e com uma taxa de juro de 1,00% a.m., ocorrendo o 1º. pagamento, 30 dias após a compra.

>>> Qual o valor das prestações mensais?

>>> Qual o total de juros pagos no financiamento?

Resp.: R\$ 942,13 e R\$ 91.084,31

RCL PV \implies - 629,01 (Saldo Devedor restante após o 2o. pagamento)

1 f AMORT = 31,45 (juros do 3o. período)

$x > < y \implies$ 199,52 (amortização do principal no 3o. período)

RCL PV \implies - 429,49 (Saldo Devedor restante após o 3o. pagamento)

1 f AMORT = 21,47 (juros do 4o. período)

$x > < y \implies$ 209,50 (amortização do principal no 4o. período)

RCL PV \implies - 219,99 (Saldo Devedor restante após o 4o. pagamento)

1 f AMORT = 11,00 (juros do 5o. período)

$x > < y \implies$ 219,97 (amortização do principal no 5o. período)

RCL PV \implies - 0,02 (Saldo Devedor restante após o 5o. pagamento)

➔ CASO QUISERMOS SABER O ACUMULADO DOS 2 PRIMEIROS PERÍODOS:

f CLX b) g END c) CHS 1000 d) 5 e) 5 f) 0 FV

g) PMT \implies 230,97

2 f AMORT = 90,95 (juros dos 2 primeiros períodos)

$x > < y \implies$ 370,99 (amortização do principal no 2 primeiros pagamentos)

RCL PV \implies - 629,01 (Saldo Devedor restante após o 2 primeiros pagamentos)

➔ CASO QUISERMOS SABER O ACUMULADO DOS 3 PRIMEIROS PERÍODOS:

f CLX b) g END c) CHS 1000 d) 5 e) 5 f) 0 FV

g) PMT \implies 230,97

h) $n' = 3 \implies$ 3 f AMORT = 122,40 (juros dos 3 primeiros períodos)

i) $x > < y \implies$ 570,51 (amortização do principal nos 3 primeiros pagamentos)

j) RCL PV \implies - 429,49 (Saldo Devedor restante após o 3o. pagamento)

TABELA PRICE com Correção Monetária

Vamos partir do exemplo da Tabela Price desenvolvido nas páginas anteriores, onde o valor constante das parcelas é igual a 230,97.

Vamos utilizar os índices da TR de novembro/2016 a março/2017 quando os índices foram respectivamente:

Nov/16 = 0,1428%

Dez/16 = 0,1849%

Jan/17 = 0,1700%

Fev/17 = 0,0302%

Mar/17 = 0,1519%

Correção Monetária das parcelas, utilizando a HP 12C:

1ª. parcela: 230,97 ENTER 0.1428% + → 231,30

2ª. parcela: 230,97 ENTER 0.1428% + 0.1849% + → 231,73

3ª. parcela: 230,97 ENTER 0.1428% + 0.1849% + 0.1700% + → 232,12

4ª. parcela: 230,97 ENTER 0.1428% + 0.1849% + 0.1700% + 0,0302% + → 232,19

5ª. parcela: 230,97 ENTER 0.1428% + 0.1849% + 0.1700% + 0,0302% + 0.1519% +
→ 232,54

Observação: corretamente se aplicam todas as inflações, a partir da data do financiamento às parcelas;

- ... assim, no 1º. mês, uma inflação;
- No 2º. mês, duas inflações;
- No 3º. mês, três inflações;
- No 4º. mês, quatro inflações;
- No 5º. mês, cinco inflações;

SISTEMA DE AMORTIZAÇÕES CONSTANTES – SISTEMA SAC

Este método é muito utilizado pelo Sistema Financeiro da Habitação (SFH), para efeito de empréstimos habitacionais.

O financiamento é pago em prestações uniformemente decrescentes, cada uma sendo subdividida em duas partes:

- Os juros do período são calculados sobre o saldo no início do período;
- A amortização do principal é calculada pela divisão do principal pelo número total de prestações; conseqüentemente as quotas de amortização são todas iguais.

Exemplo 01: Um cliente emprestou R\$ 1.000,00 por 5 meses, à taxa de 5% a.m. pelo Sistema SAC.

Desenvolver a tabela do plano de Financiamento.

Período	Saldo Início Período	Juros do Período	Saldo Final Período	Total do Pagamento	Juros do Período	Amortização do Período
1	1.000,00	50,00	1.050,00	250,00	50,00	200,00
2	800,00	40,00	840,00	240,00	40,00	200,00
3	600,00	30,00	630,00	230,00	30,00	200,00
4	400,00	20,00	420,00	220,00	20,00	200,00
5	200,00	10,00	210,00	210,00	10,00	200,00

Obtém-se o Valor Constante da Amortização, dividindo-se a dívida pelo número de parcelas.

RESOLUÇÃO NO EXCEL:

- Amortizações: = 1000 / 5 → R\$ 200,00 (todas iguais)
- Juros no 1º. mês: = 1000 * 5% → R\$ 50,00
- Valor da 1ª. Prestação: = 200 + 50 → R\$ 250,00

→ Saldo Devedor após a 1ª. Prestação: = 1000 - 200 → R\$ 50,00 (Juro)

e assim sucessivamente ...

Sistema SAC com Correção Monetária

Vamos partir do exemplo do Sistema SAC desenvolvido nas páginas anteriores, onde o valor das parcelas é: 250,00; 240,00; 230,00; 220,00 e 210,00.

Vamos utilizar os índices da TR de novembro/2016 a março/2017 quando os índices foram respectivamente:

Nov/16 = 0,1428%

Dez/16 = 0,1849%

Jan/17 = 0,1700%

Fev/17 = 0,0302%

Mar/17 = 0,1519%

Correção Monetária das parcelas, utilizando a HP 12C:

1ª. parcela: 250,00 ENTER 0.1428% + → 250,36

2ª. parcela: 240,00 ENTER 0.1428% + 0.1849% + → 240,79

3ª. parcela: 230,00 ENTER 0.1428% + 0.1849% + 0.1700% + → 231,15

4ª. parcela: 220,00 ENTER 0.1428% + 0.1849% + 0.1700% + 0,0302% + → 221,16

5ª. parcela: 210,00 ENTER 0.1428% + 0.1849% + 0.1700% + 0,0302% + 0.1519% +
→ 211,43

Observação: corretamente se aplicam todas as inflações, a partir da data do financiamento às parcelas;

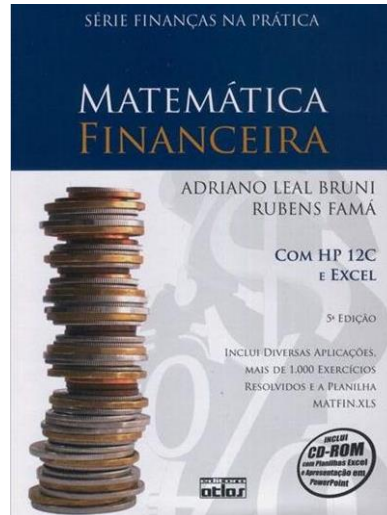
- ... assim, no 1º. mês, uma inflação;
- No 2º. mês, duas inflações;
- No 3º. mês, três inflações;
- No 4º. mês, quatro inflações;
- No 5º. mês, cinco inflações;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

→ Matemática Financeira para usuários de EXCEL e HP 12C

Alberto Merchede

Editora Atlas



→ Matemática Financeira com HP 12C e Excel

Adriano Leal Bruni e Rubens Famá

Editora Atlas

É PROIBIDA A REPRODUÇÃO PARCIAL OU TOTAL DESTA APOSTILA DE
“MATEMÁTICA FINANCEIRA COM EXCEL e HP 12C”
DE AUTORIA DO PROF. ANTONIO CARLOS BELLIO,
SEM A PRÉVIA AUTORIZAÇÃO DO AUTOR.